

收发未精确同步条件下非相关多运动辐射源 TOAs/FOAs 协同定位方法

王鼎^{1,3}, 尹洁昕^{1,3*}, 郑娜娥², 杨宾^{1,3}

(1. 中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息系统工程学院, 河南郑州 450001; 2. 中国人民解放军战略支援部队信息工程大学数据与目标工程学院, 河南郑州 450001; 3. 国家数字交换系统工程技术研究中心, 河南郑州 450002)

摘要: 在联合到达时间/到达频率的无线定位体制中,除了TOAs/FOAs (Time-Of-Arrivals/Frequency-Of-Arrivals)估计误差与传感器位置/速度先验观测误差以外,收发两端的传感器时钟同步误差也是影响定位精度的重要因素. 为了抑制时钟同步误差和各类观测误差的影响,本文针对非相关多运动辐射源定位场景,提出一种基于加权多维标度分析的TOAs/FOAs多辐射源协同定位方法. 文中首先通过构造两组标量积矩阵推导定位关系式,然后基于一阶误差分析方法得到该关系式中的误差渐近统计特性,并进而构建联合定位与时钟同步误差校正的优化准则. 针对此优化模型,本文提出一种基于正交投影矩阵数学性质的参数解耦优化算法,可实现对多运动辐射源位置/速度参数与同步误差参数的分步估计,显著降低了参与优化迭代的变量维数. 此外,文中还在收发未精确同步条件下推导TOAs/FOAs多辐射源协同定位模型的克拉美罗界,定量证明多辐射源协同定位可以带来性能增益,并且利用一阶误差分析以及正交投影矩阵数学性质证明新方法的渐近统计最优性. 仿真实验结果验证所提出的协同定位方法的优越性.

关键词: 协同定位;到达时间;到达频率;时钟同步误差;加权多维标度分析;正交投影矩阵;理论性能分析;克拉美罗界

基金项目: 国家自然科学基金(No.62171469, No.62071029);军委科技委高层次科技创新人才自主科研项目(No.a6102)

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)02-0550-14

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230524

TOAs/FOAs Cooperative Localization Method for Multiple Disjoint Moving Emitters in Presence of Imperfect Synchronization Between Receivers and Transmitters

WANG Ding^{1,3}, YIN Jie-xin^{1,3*}, ZHENG Na-e², YANG Bin^{1,3}

(1. Institute of Information System Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

2. Institute of Data and Target Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450001, China;

3. National Digital Switching System Engineering and Technology Research Center, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: In the wireless positioning system using time-of-arrivals (TOAs) and frequency-of-arrivals (FOAs) measurements, in addition to TOAs/FOAs estimation errors and sensor position/velocity prior observation errors, sensor clock synchronization error between receivers and transmitters is a key factor affecting positioning accuracy. In order to restrain the effects of clock synchronization errors and various types of observation errors, a novel multi-source cooperative positioning method using TOAs/FOAs based on weighted multidimensional scaling analysis is proposed for the localization of multiple disjoint moving emitters. Firstly, this paper deduces the positioning relationship by constructing two sets of scalar product matrices. Then, the asymptotically statistical characteristics of the errors in the positioning relationship are obtained using a first-order error analysis approach. Subsequently, an optimization criterion for joint synchronization and localization is established. In order to obtain the global optimal solution, a parameter decoupling optimization algorithm is present-

ed using the mathematical properties of orthogonal projection matrix. The algorithm can sequentially estimate the position/velocity parameters of the multiple moving emitters and the parameters of synchronization errors, thus significantly reducing the number of variables involved in the optimization iteration. Furthermore, the Cramér-Rao bound (CRB) for the multi-source cooperative localization model using TOAs/FOAs in the presence of imperfect synchronization between receivers and transmitters is derived. We also formally prove that the performance gain can be obtained from multi-source cooperative positioning. Additionally, the new estimator is proved to be asymptotically statistically efficient using the first-order error analysis method and the mathematical properties of orthogonal projection matrix. Simulation results demonstrate the superiority of the proposed cooperative localization method.

Key words: cooperative positioning; time-of-arrival; frequency-of-arrival; clock synchronization error; weighted multidimensional scaling analysis; orthogonal projection matrix; theoretical performance analysis; Cramér-Rao bound

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62171469, No.62071029); Independent Research Project for High-Level Scientific and Technological Innovation Talents of the Science and Technology Commission of the Military Commission (No.a6102)

1 引言

基于到达时间差 (Time-Difference-Of-Arrival, TDOA) 或者到达时间 (Time-Of-Arrival, TOA) 的辐射源定位技术在目标监测、态势感知、应急救援等诸多工业与电子信息领域中发挥越来越重要作用^[1]。

时钟同步误差是影响 TDOA 或者 TOA 定位精度的重要因素。文献[2,3]针对无线传感网络 (Wireless Sensor Network, WSN), 提出了基于 TOA 的源节点定位与时钟同步联合处理方法, 可有效抑制时钟同步误差对源节点定位的影响; 文献[4,5]在 WSN 的时钟未同步条件下提出了基于双向 TOA 的源节点定位方法, 可比单向 TOA 获得更高的定位精度; 文献[6~8]针对异步 WSN, 提出了基于 TDOA 的源节点定位方法, 可获得渐近统计最优的估计结果。针对时钟同步误差存在条件下的辐射源 TDOA 定位场景, 文献[9]提出了基于伪线性观测方程的两步加权最小二乘 (Two Step Weighted Least Squares, TSWLS) 定位方法, 可以实现辐射源位置参数与时钟同步误差参数的分步估计; 文献[10]提出了基于加权多维标度分析的定位方法, 其在大观测误差条件下有效提升了估计精度; 文献[11]提出了基于二次约束加权最小二乘估计的定位方法, 其具有较高的误差阈值, 但是需要选择合理的迭代初始值; 文献[12]提出了基于半正定松弛的定位方法, 可有效避免迭代初始值的影响。在辐射源 TOA 定位场景中, 同步误差往往表现为收发两端传感器之间的时钟同步误差, 对此, 文献[13]提出了联合线性加权最小二乘 (Linear Weighted Least Squares, LWSL) 估计与多项式求根的定位方法, 其能以较低的计算复杂度获得较高的估计精度; 文献[14,15]提出了基于伪线性观测方程的 TSWLS 定位方法, 均具有渐近统计最优性; 文献[16]从理论上分析了随机型同步误差对 TOA 定位精度的影响, 并且提出了针对随机型同步误差参数的 TSWLS 定位方

法。文献[17]针对分布式 MIMO (Multiple Input Multiple Output) 雷达无源目标定位场景, 在时钟同步误差存在条件下提出了基于 TOA 观测量的闭式解定位方法。文献[18]在时频同步误差存在条件下, 提出了基于最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 估计的双站 TDOA/FDOA 联合定位方法; 文献[19]在收发两端传感器时频未精确同步条件下, 提出了基于半正定松弛的 TOA/FOA 联合定位方法, 可有效抑制时频同步误差的影响。

上面提到的定位方法均只考虑对单个辐射源进行定位, 然而在实际场景中, 监测区域中可能存在多个辐射源, 此时如果能将多个辐射源看成是一个整体进行协同定位, 则能够获得协同增益, 提高整体定位精度。文献[20]提出了基于时频差观测量的多个非相关源协同定位方法, 其属于 TSWLS 类方法, 具有渐近统计最优性; 文献[21]在文献[20]的基础上提出了基于时频差观测量的改进型 TSWLS 协同定位方法, 其不仅能对多个辐射源进行定位, 还能提供更精确的传感器位置/速度参数; 文献[22]提出了基于时频差观测量的迭代约束加权最小二乘 (Iterative Constrained Weighted Least Squares, ICWLS) 协同定位方法, 相比于闭式定位方法, 其能获得更高的误差阈值; 文献[23,24]在获得辐射源位置/速度先验知识 (约束) 的情形下提出了基于时频差观测量的多辐射源协同定位方法, 其通过利用先验知识 (约束) 可以有效提升定位精度。上述多辐射源协同定位方法均未考虑时频同步误差的影响, 而本文则将在时频同步误差存在条件下研究多辐射源协同定位方法。

本文针对收发两端传感器之间存在时频同步误差的场景, 重点研究了基于 TOAs/FOAs (Time-Of-Arrivals/Frequency-Of-Arrivals) 观测量的多辐射源协同定位问题, 提出了一种基于加权多维标度分析的 TOAs/FOAs 多辐射源协同定位方法, 可实现对辐射源位置/速度参

数与时频同步误差参数的解耦估计,通过理论性能分析定量证明了新方法的估计性能可以逼近相应的克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB),因而具有渐近统计最优的性能,仿真实验验证了新方法的优越性和文中理论性能分析的有效性.

2 收发未精确同步条件下 TOAs/FOAs 定位观测模型与问题形成

假设在 3 维空间中 共有 M 个运动传感器利用 TOAs/FOAs 观测信息对 N 个非相关运动辐射源进行定位. 将第 m 个传感器的位置向量记为 $\mathbf{q}_m = (x_m^{(q)}, y_m^{(q)}, z_m^{(q)})^T$, 速度向量记为 $\dot{\mathbf{q}}_m = (\dot{x}_m^{(q)}, \dot{y}_m^{(q)}, \dot{z}_m^{(q)})^T$, 并令 $\tilde{\mathbf{q}}_m = [\mathbf{q}_m^T \dot{\mathbf{q}}_m^T]^T$, 将其称为第 m 个传感器的位置/速度向量. 将第 n 个辐射源的位置向量记为 $\mathbf{p}_n = (x_n^{(p)}, y_n^{(p)}, z_n^{(p)})^T$, 速度向量记为 $\dot{\mathbf{p}}_n = (\dot{x}_n^{(p)}, \dot{y}_n^{(p)}, \dot{z}_n^{(p)})^T$, 并令 $\tilde{\mathbf{p}}_n = [\mathbf{p}_n^T \dot{\mathbf{p}}_n^T]^T$, 将其称为第 n 个运动辐射源的位置/速度向量. 在信号传播速度和载波频率已知的条件下, TOA 与 FOA 可以分别等价于距离与距离变化率, 为了方便起见, 这里将利用距离/距离变化率构建观测模型, 并进行定位方法的推导与理论性能的分析. 不妨将第 n 个辐射源与第 m 个传感器之间的距离与距离变化率分别记为 r_{nm} 与 \dot{r}_{nm} , 则有

$$\begin{cases} r_{nm} = \|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m\|_2 \\ \dot{r}_{nm} = \frac{d r_{nm}}{dt} = \frac{(\dot{\mathbf{p}}_n - \dot{\mathbf{q}}_m)^T (\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m)}{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m\|_2} \end{cases} \quad (1)$$

若利用距离/距离变化率对运动辐射源进行精确定位, 需要信号在收发两端完成精确同步. 然而, 在非合作定位场景中, 该条件一般难以得到满足. 时钟偏差和时钟漂移将会产生时频同步误差^[19], 从而对定位模型产生较大影响. 在收发未精确同步条件下, 针对第 n 个运动辐射源的 TOAs/FOAs 定位观测模型可以表示为^[19]

$$\begin{cases} \hat{r}_{nm}^{(d)} = r_{nm}^{(d)} + \zeta_{nm1}^{(r)} = r_{nm} + d_n + \zeta_{nm1}^{(r)} \\ \quad = \|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m\|_2 + d_n + \zeta_{nm1}^{(r)} \\ \hat{r}_{nm}^{(d)} = \dot{r}_{nm}^{(d)} + \zeta_{nm2}^{(r)} = \dot{r}_{nm} + \dot{d}_n + \zeta_{nm2}^{(r)} \\ \quad = \frac{(\dot{\mathbf{p}}_n - \dot{\mathbf{q}}_m)^T (\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m)}{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m\|_2} + \dot{d}_n + \zeta_{nm2}^{(r)} \end{cases} \quad (2)$$

其中, d_n 和 \dot{d}_n 分别表示由时钟偏差和时钟漂移所引起的距离误差和距离变化率误差; $\zeta_{nm1}^{(r)}$ 和 $\zeta_{nm2}^{(r)}$ 分别表示距离观测误差和距离变化率观测误差; $r_{nm}^{(d)} = r_{nm} + d_n$ 和 $\dot{r}_{nm}^{(d)} = \dot{r}_{nm} + \dot{d}_n$ 分别表示无观测误差且未精确同步条件下的距离观测量和距离变化率观测量.

针对第 n 个运动辐射源, 将式(2)中的两组等式写成向量形式可得

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} = (\hat{r}_{n1}^{(d)}, \hat{r}_{n2}^{(d)}, \dots, \hat{r}_{nM}^{(d)})^T = \mathbf{r}_n^{(d)} + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} \\ \quad = \mathbf{r}_n + \mathbf{1}_M \mathbf{d}_n + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} = \mathbf{g}_1(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{1}_M \mathbf{d}_n + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} \\ \hat{\dot{\mathbf{r}}}_n^{(d)} = (\hat{\dot{r}}_{n1}^{(d)}, \hat{\dot{r}}_{n2}^{(d)}, \dots, \hat{\dot{r}}_{nM}^{(d)})^T = \dot{\mathbf{r}}_n^{(d)} + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} \\ \quad = \dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{1}_M \dot{\mathbf{d}}_n + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} = \mathbf{g}_2(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{1}_M \dot{\mathbf{d}}_n + \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} \end{cases} \quad (3)$$

其中, \mathbf{r}_n 和 $\dot{\mathbf{r}}_n$ 分别表示精确的距离向量和距离变化率向量; $\mathbf{r}_n^{(d)}$ 和 $\dot{\mathbf{r}}_n^{(d)}$ 分别表示无观测误差且未精确同步条件下的距离观测向量和距离变化率观测向量; $\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)}$ 和 $\hat{\dot{\mathbf{r}}}_n^{(d)}$ 分别表示有观测误差且未精确同步条件下的距离观测向量和距离变化率观测向量; $\mathbf{g}_1(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}})$ 和 $\mathbf{g}_2(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}})$ 均是由式(2)确定的非线性函数; $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_1^T \tilde{\mathbf{q}}_2^T \dots \tilde{\mathbf{q}}_M^T]^T$ 表示全部传感器的位置/速度向量. 上述向量可以依次写为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_n = \mathbf{g}_1(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) = (r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nM})^T \\ \dot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{g}_2(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) = (\dot{r}_{n1}, \dot{r}_{n2}, \dots, \dot{r}_{nM})^T \\ \mathbf{r}_n^{(d)} = (r_{n1}^{(d)}, r_{n2}^{(d)}, \dots, r_{nM}^{(d)})^T = \mathbf{r}_n + \mathbf{1}_M \mathbf{d}_n \\ \dot{\mathbf{r}}_n^{(d)} = (\dot{r}_{n1}^{(d)}, \dot{r}_{n2}^{(d)}, \dots, \dot{r}_{nM}^{(d)})^T = \dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{1}_M \dot{\mathbf{d}}_n \\ \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} = (\zeta_{n11}^{(r)}, \zeta_{n21}^{(r)}, \dots, \zeta_{nM1}^{(r)})^T; \boldsymbol{\zeta}_n^{(r)} = (\zeta_{n12}^{(r)}, \zeta_{n22}^{(r)}, \dots, \zeta_{nM2}^{(r)})^T \end{cases} \quad (4)$$

现将式(3)中的两组等式合并可得

$$\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} \\ \hat{\dot{\mathbf{r}}}_n^{(d)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{r}}_n^{(d)} + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)} = \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_M \tilde{\mathbf{d}}_n + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_n = [\mathbf{r}_n^T \dot{\mathbf{r}}_n^T]^T = [(\mathbf{g}_1(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}))^T (\mathbf{g}_2(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}))^T]^T = \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{p}}_n, \tilde{\mathbf{q}}) \\ \tilde{\mathbf{r}}_n^{(d)} = [(\mathbf{r}_n^{(d)})^T (\dot{\mathbf{r}}_n^{(d)})^T]^T = \tilde{\mathbf{r}}_n + \mathbf{J}_M \tilde{\mathbf{d}}_n; \tilde{\mathbf{d}}_n = [d_n \dot{d}_n]^T \\ \mathbf{J}_M = \text{blkdiag}\{\mathbf{1}_M, \mathbf{1}_M\}; \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)} = [(\boldsymbol{\zeta}_n^{(r)})^T (\boldsymbol{\zeta}_n^{(r)})^T]^T \end{cases} \quad (6)$$

假设观测误差向量 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)}$ 服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_n^{(r)} = \mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(r)})^T]$ 的高斯分布.

尽管不同的辐射源之间彼此不相关, 但是 N 个辐射源对应共同的传感器位置/速度误差, 此时应考虑对多个辐射源进行协同定位, 以获得协同增益. 为此需要将式(5)中的 N 个等式进行合并可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_j^{(d)} &= [(\hat{r}_{j1}^{(d)})^T (\hat{r}_{j2}^{(d)})^T \dots (\hat{r}_{jN}^{(d)})^T]^T = \tilde{\mathbf{r}}_j^{(d)} + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)} \\ &= \tilde{\mathbf{r}}_j + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J}_M) \tilde{\mathbf{d}}_j + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)} = \tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\mathbf{p}}_j, \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_j \tilde{\mathbf{d}}_j + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_j = [\tilde{\mathbf{r}}_1^T \tilde{\mathbf{r}}_2^T \dots \tilde{\mathbf{r}}_N^T]^T = \tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\mathbf{p}}_j, \tilde{\mathbf{q}}); \mathbf{J}_j = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J}_M \\ \tilde{\mathbf{r}}_j^{(d)} = [(\tilde{\mathbf{r}}_1^{(d)})^T (\tilde{\mathbf{r}}_2^{(d)})^T \dots (\tilde{\mathbf{r}}_N^{(d)})^T]^T = \tilde{\mathbf{r}}_j + \mathbf{J}_j \tilde{\mathbf{d}}_j; \tilde{\mathbf{d}}_j = [\tilde{d}_1^T \tilde{d}_2^T \dots \tilde{d}_N^T]^T \\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)} = [(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_1^{(r)})^T (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_2^{(r)})^T \dots (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_N^{(r)})^T]^T; \tilde{\mathbf{p}}_j = [\tilde{\mathbf{p}}_1^T \tilde{\mathbf{p}}_2^T \dots \tilde{\mathbf{p}}_N^T]^T \\ \tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\mathbf{p}}_j, \tilde{\mathbf{q}}) = [(\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{q}}))^T (\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{p}}_2, \tilde{\mathbf{q}}))^T \dots (\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{p}}_N, \tilde{\mathbf{q}}))^T]^T \end{cases} \quad (8)$$

观测误差向量 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)}$ 服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)} = \mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_j^{(r)})^T]$ 的高斯分布. 文中将 $\tilde{\mathbf{p}}_j$ 称为多辐射源位置/速度向量, 将 $\tilde{\mathbf{d}}_j$ 称为同步误差参数向量.

上述定位模型需要已知传感器位置/速度向量 $\{\tilde{\mathbf{q}}_m\}_{1 \leq m \leq M}$. 然而, 对于运动传感器而言, 其通常会安装

在机载或者舰载平台上,此时的传感器位置/速度向量 $\{\hat{\boldsymbol{q}}_m\}_{1 \leq m \leq M}$ 容易产生随机误差,仅能得到其先验观测值,如式(9)所示:

$$\hat{\boldsymbol{q}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{q}}_m \\ \hat{\boldsymbol{q}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_m \\ \dot{\boldsymbol{q}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{m1}^{(q)} \\ \boldsymbol{\xi}_{m2}^{(q)} \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{q}}_m + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_m^{(q)} \quad (9)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{q}}_m = (\hat{x}_m^{(q)}, \hat{y}_m^{(q)}, \hat{z}_m^{(q)})^T$ 和 $\dot{\hat{\boldsymbol{q}}}_m = (\hat{x}_m^{(q)}, \hat{y}_m^{(q)}, \hat{z}_m^{(q)})^T$ 分别表示第 m 个传感器的位置先验观测向量和速度先验观测向量; $\boldsymbol{\xi}_{m1}^{(q)}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_{m2}^{(q)}$ 分别表示第 m 个传感器的位置先验观测误差向量和速度先验观测误差向量; $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m^{(q)} = [(\boldsymbol{\xi}_{m1}^{(q)})^T (\boldsymbol{\xi}_{m2}^{(q)})^T]^T$ 表示第 m 个传感器的位置/速度先验观测误差向量. 将式(9)中的 M 个等式进行合并可得

$$\hat{\boldsymbol{q}} = [\hat{\boldsymbol{q}}_1^T \hat{\boldsymbol{q}}_2^T \cdots \hat{\boldsymbol{q}}_M^T]^T = \tilde{\boldsymbol{q}} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(q)} \quad (10)$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(q)} = [(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^{(q)})^T (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2^{(q)})^T \cdots (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_M^{(q)})^T]^T$, 假设其服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}^{(q)} = E[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(q)} (\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(q)})^T]$ 的高斯分布.

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\mu}_a) = \left(E \left[\frac{\partial \ln[p_r(\boldsymbol{\mu}_b | \boldsymbol{\mu}_a)]}{\partial \boldsymbol{\mu}_a} \frac{\partial \ln[p_r(\boldsymbol{\mu}_b | \boldsymbol{\mu}_a)]}{\partial \boldsymbol{\mu}_a^T} \right] \right)^{-1} \\ = \begin{bmatrix} (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) & (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \boldsymbol{J}_j & (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) \\ \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) & \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \boldsymbol{J}_j & \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) \\ (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) & (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \boldsymbol{J}_j & (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) + (\boldsymbol{\Sigma}^{(q)})^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \text{blkdiag}\{\tilde{\boldsymbol{G}}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_1, \tilde{\boldsymbol{q}}), \tilde{\boldsymbol{G}}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_2, \tilde{\boldsymbol{q}}), \dots, \tilde{\boldsymbol{G}}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_N, \tilde{\boldsymbol{q}})\} \\ \tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) = [(\tilde{\boldsymbol{G}}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_1, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\tilde{\boldsymbol{G}}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_2, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T \cdots (\tilde{\boldsymbol{G}}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_N, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T]^T \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{G}}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{p}}_n^T}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{G}}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}^T}$ 均为

Jacobian 矩阵.

3.2 关于克拉美罗界的进一步分析与讨论

本文提出的定位方法主要用于确定向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的估计值,结合分块矩阵求逆公式以及矩阵和求逆公式可得

$$\text{CRB} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_j \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_j \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) & (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_j \\ \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) & \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_j \end{bmatrix}^{-1} \quad (14)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)} = \boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)} + \tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) \boldsymbol{\Sigma}^{(q)} (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T \quad (15)$$

容易验证 $\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)} \geq \boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)}$, 此时由式(14)和式(15)可知, 传感器位置/速度先验观测误差对估计精度的影响可以

3 克拉美罗界分析

3.1 克拉美罗界的基本表达式

在本文的定位模型中,全部的未知参数包括向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 、 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 以及 $\tilde{\boldsymbol{q}}$, 全部的观测量包括向量 $\hat{\boldsymbol{r}}_j^{(d)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{q}}$, 不妨定义参数向量 $\boldsymbol{\mu}_a = [\tilde{\boldsymbol{p}}_j^T \tilde{\boldsymbol{d}}_j^T \tilde{\boldsymbol{q}}^T]^T$ 和观测向量 $\boldsymbol{\mu}_b = [(\hat{\boldsymbol{r}}_j^{(d)})^T \hat{\boldsymbol{q}}^T]^T$. 关于观测向量 $\boldsymbol{\mu}_b$ 的对数似然函数可以表示为

$$\ln[p_r(\boldsymbol{\mu}_b | \boldsymbol{\mu}_a)] = L - \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{r}}_j^{(d)} - \tilde{\boldsymbol{g}}_j(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{J}_j \tilde{\boldsymbol{d}}_j)^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \\ \times (\hat{\boldsymbol{r}}_j^{(d)} - \tilde{\boldsymbol{g}}_j(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{J}_j \tilde{\boldsymbol{d}}_j) \\ - \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{q}} - \tilde{\boldsymbol{q}})^T (\boldsymbol{\Sigma}^{(q)})^{-1} (\hat{\boldsymbol{q}} - \tilde{\boldsymbol{q}}) \quad (11)$$

其中, L 表示与参数向量 $\boldsymbol{\mu}_a$ 无关的常数. 基于式(11)可以得到关于向量 $\boldsymbol{\mu}_a$ 的 CRB 表达式, 如式(12)所示:

等效为增加了 TOAs/FOAs 观测误差 (即由协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)}$ 增加至协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)}$), 并且增加幅度与 Jacobian 矩阵 $\tilde{\boldsymbol{G}}_{j2}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})$ 成正比.

由于本文提出的多辐射源协同定位方法能够实现向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的解耦估计, 因此下面将分别给出关于向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的 CRB. 首先利用分块矩阵求逆公式可得

$$\text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \\ = [\boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \boldsymbol{\Pi}^\perp [(\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})] (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \boldsymbol{J}_j]^{-1} \quad (16)$$

其中, $\boldsymbol{\Pi}^\perp [(\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]$ 表示矩阵 $(\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})$ 列补空间上的正交投影矩阵, 其表达式为

$$\boldsymbol{\Pi}^\perp [(\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})] \\ = \boldsymbol{I}_{2MN} - (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) \\ \times (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1/2} \quad (17)$$

接着再次利用分块矩阵求逆公式可得

$$\text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j) = [(\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) \\ - (\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_j [\boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_j]^{-1} \\ \times \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]^{-1} \quad (18)$$

然后结合式(16)、式(18)以及矩阵和求逆公式

可知

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j) &= [(\tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]^{-1} \\ &\quad + [(\tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]^{-1} \\ &\quad \times (\tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_j \text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \boldsymbol{J}_j^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \\ &\quad \times \tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}) [(\tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(rq)})^{-1} \tilde{G}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

另一方面,由于本文提出的定位方法是用于多辐射源协同定位,因此这里需要将协同定位的CRB与非协同定位的CRB进行定量比较,用以说明协同处理能够带来性能增益.若对各个辐射源独立定位,则类似于式(14),关于第 n 个辐射源参数向量 $\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_n \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_n \end{bmatrix}$ 的CRB表达式

可以表示为

$$\begin{aligned} \text{CRB}_{\text{nc}} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_n \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_n \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} (\tilde{G}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_n^{(rq)})^{-1} \tilde{G}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}) & (\tilde{G}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_n^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_M \\ \boldsymbol{J}_M^T (\boldsymbol{\Sigma}_n^{(rq)})^{-1} \tilde{G}_1(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}) & \boldsymbol{J}_M^T (\boldsymbol{\Sigma}_n^{(rq)})^{-1} \boldsymbol{J}_M \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

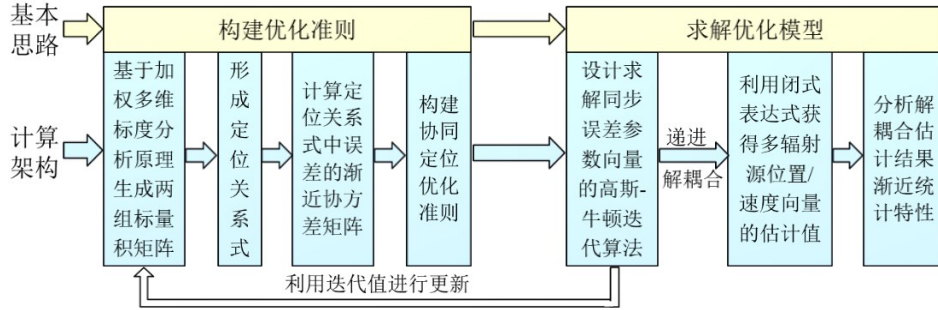


图1 新方法的总技术路线图

4.2 新方法的数学推导

4.2.1 基于加权多维标度分析原理生成两组标量积矩阵

在加权多维标度定位方法中,需要首先确定标量积矩阵,其中包含了传感器与辐射源之间的距离/距离变化率信息.针对第 n 个运动辐射源,基于传感器和辐射源的位置向量和速度向量定义坐标矩阵 $\boldsymbol{Q}_n^{(p)}$ 和速度矩阵 $\dot{\boldsymbol{Q}}_n^{(p)}$,如式(22)所示:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}_n^{(p)} = [q_1 - p_n \ q_2 - p_n \ \cdots \ q_M - p_n]^T = \boldsymbol{Q} - \mathbf{1}_M \boldsymbol{p}_n^T \\ \dot{\boldsymbol{Q}}_n^{(p)} = \frac{d\boldsymbol{Q}_n^{(p)}}{dt} = [\dot{q}_1 - \dot{p}_n \ \dot{q}_2 - \dot{p}_n \ \cdots \ \dot{q}_M - \dot{p}_n]^T = \dot{\boldsymbol{Q}} - \mathbf{1}_M \dot{\boldsymbol{p}}_n^T \end{cases} \quad (22)$$

其中, $\boldsymbol{Q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_M]^T$ 和 $\dot{\boldsymbol{Q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \cdots \ \dot{q}_M]^T$.

利用矩阵 $\boldsymbol{Q}_n^{(p)}$ 构造第1组标量积矩阵,如式(23)所示:

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^{(rq)} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{(r)} + \tilde{G}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}) \boldsymbol{\Sigma}^{(q)} (\tilde{G}_2(\tilde{\boldsymbol{p}}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T \quad (21)$$

式(20)中的下角标“nc”表示非协同定位的CRB.

定量比较式(14)和式(20)可得 $\text{CRB} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_n \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_n \end{bmatrix} \right) \leq \text{CRB}_{\text{nc}} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_n \\ \tilde{\boldsymbol{d}}_n \end{bmatrix} \right)$, 该关系式表明通过协同定位有助于提高对每个辐射源的位置/速度向量的估计精度以及时钟同步误差参数向量的估计精度.

4 新方法的基本原理与计算步骤

4.1 新方法的总体描述

新方法旨在获得向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ (其中包含 $6N$ 个参数)和 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ (其中包含 $2N$ 个参数)的渐近统计最优估计值.为了提高闭式定位方法的误差阈值,新方法是基于加权多维标度分析原理所衍生出的迭代定位方法.为了降低迭代初始值的不确定性所带来的影响,新方法借助加权多维标度分析实现对向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的解耦合估计,使得参与迭代的变量维数大大降低,其中参与迭代的变量仅为向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$,只包含 $2N$ (远小于 $8N$)个参数.图1描述了新方法的总技术路线.

$$\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{Q}_n^{(p)} (\boldsymbol{Q}_n^{(p)})^T = \frac{1}{2} [(r_n \odot r_n) \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (r_n \odot r_n)^T] - \frac{1}{2} \boldsymbol{W} \quad (23)$$

其中,

$$\boldsymbol{W} = \text{vecd}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T] \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\text{vecd}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T])^T - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T \quad (24)$$

在收发未精确同步条件下,需要将式(23)中的向量 r_n 替换为向量 $r_n^{(d)} - \mathbf{1}_M d_n$,此时可以将标量积矩阵 \boldsymbol{R}_n 转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_n &= \frac{1}{2} [(r_n^{(d)} \odot r_n^{(d)}) \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (r_n^{(d)} \odot r_n^{(d)})^T] - \frac{1}{2} \boldsymbol{W} \\ &\quad - d_n [r_n^{(d)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (r_n^{(d)})^T] + d_n^2 \mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T \end{aligned} \quad (25)$$

接着将式(23)两边对时间求导可以得到第2组标量积矩阵,如式(26)所示:

$$\dot{\boldsymbol{R}}_n = \frac{d\boldsymbol{R}_n}{dt} = (\dot{r}_n \odot r_n) \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\dot{r}_n \odot r_n)^T - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{W}} \quad (26)$$

其中,

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{dW}{dt} \\ &= 2\text{vecd}[\dot{Q}Q^T] \mathbf{1}_M^T + 2\mathbf{1}_M(\text{vecd}[\dot{Q}Q^T])^T \\ &\quad - 2\dot{Q}Q^T - 2Q\dot{Q}^T \end{aligned} \quad (27)$$

在收发未精确同步条件下,需要将式(26)中的向量 r_n 替换为向量 $r_n^{(d)} - \mathbf{1}_M d_n$, 向量 \dot{r}_n 替换为向量 $\dot{r}_n^{(d)} - \mathbf{1}_M \dot{d}_n$, 此时可以将标量积矩阵 \dot{R}_n 转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{R}_n &= (\dot{r}_n^{(d)} \odot r_n^{(d)}) \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\dot{r}_n^{(d)} \odot r_n^{(d)})^T - \frac{1}{2} \dot{W} \\ &\quad - \dot{d}_n [r_n^{(d)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (r_n^{(d)})^T] - d_n [\dot{r}_n^{(d)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\dot{r}_n^{(d)})^T] \\ &\quad + 2d_n \dot{d}_n \mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T \end{aligned} \quad (28)$$

针对 N 个运动辐射源,由式(25)和式(28)一共构造了两组(共计 $2N$ 个)标量积矩阵 $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 和 $\{\dot{R}_n\}_{1 \leq n \leq N}$, 其中包含了全部距离 $\{r_{nm}\}$ 和距离变化率 $\{\dot{r}_{nm}\}$ 观测信息,可以为后续形成定位关系式奠定重要基础.

4.2.2 形成定位关系式

本小节将利用两组标量积矩阵 $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 和 $\{\dot{R}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 形成新的定位关系式. 首先基于第 1 组标量积矩阵 $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 以及矩阵运算可以得到如下结论.

定理 1 针对第 n 个运动辐射源,若 $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix}$ 为行满秩矩阵,并且令

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix}^\dagger = [\mathbf{1}_M \ Q] \bar{Q} \quad (29)$$

其中, $\bar{Q} = \begin{bmatrix} M & \sum_{m=1}^M q_m^T \\ \sum_{m=1}^M q_m & \sum_{m=1}^M q_m q_m^T \end{bmatrix}$, 则有如下定位关系式:

$$R_n S \begin{bmatrix} 1 \\ p_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}_M \quad (30)$$

证明 首先利用式(22)中的第 1 式可以将矩阵 $Q_n^{(p)}$ 表示为

$$Q_n^{(p)} = [\mathbf{1}_M \ Q] \begin{bmatrix} -p_n^T \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

结合式(23)和式(31)可得

$$R_n S \begin{bmatrix} 1 \\ p_n \end{bmatrix} = Q_n^{(p)} [-p_n \ I_3] \begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} 1 \\ p_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

由于 $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix}$ 为行满秩矩阵,利用式(29)可知

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix}^\dagger = I_4 \quad (33)$$

最后将式(33)代入式(32)中可得

$$R_n S \begin{bmatrix} 1 \\ p_n \end{bmatrix} = Q_n^{(p)} (p_n - p_n) = \mathbf{0}_M \quad (34)$$

证毕.

下面将式(30)两边对时间求导可以得到第 2 组定位关系式,如式(35)所示:

$$(\dot{R}_n S + R_n \dot{S}) \begin{bmatrix} 1 \\ p_n \end{bmatrix} + R_n S \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}_M \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{dS}{dt} = [\mathbf{0}_M \ \dot{Q}] \bar{Q} + [\mathbf{1}_M \ Q] \dot{\bar{Q}} \\ &= \left([\mathbf{0}_M \ \dot{Q}] - S \begin{bmatrix} 0 & \sum_{m=1}^M \dot{q}_m^T \\ \sum_{m=1}^M \dot{q}_m & \sum_{m=1}^M (\dot{q}_m q_m^T + q_m \dot{q}_m^T) \end{bmatrix} \right) \bar{Q} \end{aligned} \quad (36)$$

其中,

$$\dot{\bar{Q}} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = -\bar{Q} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_M^T \dot{Q} \\ \dot{Q}^T \mathbf{1}_M & \dot{Q}^T Q + Q^T \dot{Q} \end{bmatrix} \bar{Q} \quad (37)$$

最后将式(30)和式(35)进行合并可以得到如下定位关系式:

$$\mathbf{0}_{2M} = \begin{bmatrix} R_n S & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \dot{R}_n S + R_n \dot{S} & R_n S \bar{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中, $\bar{I}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T \\ I_3 \end{bmatrix}$. 若将矩阵 S 和矩阵 \dot{S} 分别分块表示为

$$S = \begin{bmatrix} -s_1 & S_2 \\ \mathbf{1}_M^T & S_3 \end{bmatrix}; \dot{S} = \begin{bmatrix} -\dot{s}_1 & \dot{S}_2 \\ \mathbf{1}_M^T & \dot{S}_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中, $s_1 = -S \mathbf{i}_4^{(0)}$ (其中 $\mathbf{i}_4^{(0)}$ 表示单位矩阵 I_4 中的第 1 列); $\dot{s}_1 = \frac{ds_1}{dt} = -\dot{S} \mathbf{i}_4^{(0)}$; $S_2 = S \bar{I}_3$; $\dot{S}_2 = \frac{dS_2}{dt} = \dot{S} \bar{I}_3$, 则可以将式(38)重新写为

$$\begin{aligned} A_n(\tilde{d}_n) \tilde{p}_n &= \begin{bmatrix} R_n S_2 & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \dot{R}_n S_2 + R_n \dot{S}_2 & R_n S_2 \end{bmatrix} \tilde{p}_n \\ &= \begin{bmatrix} R_n s_1 \\ \dot{R}_n s_1 + R_n \dot{s}_1 \end{bmatrix} = b_n(\tilde{d}_n) \end{aligned} \quad (40)$$

其中,矩阵 $A_n(\tilde{d}_n)$ 和向量 $b_n(\tilde{d}_n)$ 均可以看成是关于同步误差参数向量 \tilde{d}_n 的函数,并且由式(25)和式(28)可知,它们都是关于向量 \tilde{d}_n 的非线性函数.

式(40)就是针对第 n 个运动辐射源的定位关系式,其既是关于第 n 个运动辐射源的位置/速度向量 \tilde{p}_n 的线性方程(并且满足 $\tilde{p}_n = [A_n(\tilde{d}_n)]^\dagger b_n(\tilde{d}_n)$),同时也是关于同步误差参数向量 \tilde{d}_n 的非线性方程,此代数特性可以为后续提出参数解耦合优化算法奠定基础. 另一方面,为了获得唯一的参数估计结果,还需要确保 $A_n(\tilde{d}_n)$ 为列满秩矩阵,具体可见如下结论.

定理 2 若 $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ Q^T \end{bmatrix}$ 为行满秩矩阵,则矩阵 $A_n(\tilde{d}_n)$ 具有

列满秩性, 即有 $\text{rank}[A_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)] = 6$.

证明 根据式(40)中矩阵 $A_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)$ 的分块结构可知, 仅需要证明 $\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2$ 为列满秩矩阵即可. 首先结合式(23)和式(31)可得

$$\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2 = [\mathbf{1}_M \mathbf{Q}] \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_n^T \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} [-\mathbf{p}_n \mathbf{I}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{1}_M^T \\ \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_3 \quad (41)$$

然后将式(33)代入式(41)中可知,

$$\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2 = [\mathbf{1}_M \mathbf{Q}] \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_n^T \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

最后利用条件 $\text{rank}([\mathbf{1}_M \mathbf{Q}]) = 4$ 以及矩阵秩的基本性质可得

$$\text{rank}[\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2] \leq \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{p}_n^T \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \right) = 3 \quad (43)$$

$$\text{rank}[\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2] \geq \text{rank}([\mathbf{1}_M \mathbf{Q}]) + \text{rank} \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{p}_n^T \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \right) - 4 = 3 \quad (44)$$

结合式(43)和式(44)可知 $\text{rank}[\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2] = 3$, 由此可知 $\mathbf{R}_n \mathbf{S}_2$ 为列满秩矩阵. 证毕.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S} &\doteq \left([\mathbf{0}_M \Delta \hat{\mathbf{Q}}] - \Delta \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_M^T \Delta \hat{\mathbf{Q}} \\ \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{1}_M & \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_M^T \Delta \mathbf{Q} \\ (\Delta \mathbf{Q})^T \mathbf{1}_M & (\Delta \mathbf{Q})^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} \right) \bar{\mathbf{Q}} \\ &- \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_M^T \Delta \hat{\mathbf{Q}} \\ (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T \mathbf{1}_M & \hat{\mathbf{Q}}^T \Delta \mathbf{Q} + (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \Delta \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (48)$$

其中,

$$\Delta \mathbf{W} \doteq 2 \text{vecd}[\Delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T] \mathbf{1}_M^T + 2 \mathbf{1}_M (\text{vecd}[\Delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T])^T - 2 \Delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T - 2 \mathbf{Q} (\Delta \mathbf{Q})^T \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{W}} &\doteq 2 \text{vecd}[\Delta \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^T] \mathbf{1}_M^T + 2 \text{vecd}[\hat{\mathbf{Q}} (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T] \mathbf{1}_M^T \\ &+ 2 \mathbf{1}_M (\text{vecd}[\Delta \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^T])^T + 2 \mathbf{1}_M (\text{vecd}[\hat{\mathbf{Q}} (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T])^T \\ &- 2 \Delta \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^T - 2 \hat{\mathbf{Q}} (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T - 2 \Delta \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^T - 2 \hat{\mathbf{Q}} (\Delta \hat{\mathbf{Q}})^T \end{aligned} \quad (50)$$

其中, $\Delta \mathbf{Q} = [\xi_{11}^{(q)} \xi_{21}^{(q)} \dots \xi_{M1}^{(q)}]^T$ 和 $\Delta \hat{\mathbf{Q}} = [\xi_{12}^{(q)} \xi_{22}^{(q)} \dots \xi_{M2}^{(q)}]^T$.

下面将上述含有观测误差的矩阵代入式(40)中, 并且定义如下矩阵和向量:

$$\hat{A}_n(\tilde{\mathbf{d}}_n) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{S}}_2 & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{S}}_2 & \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix}; \hat{b}_n(\tilde{\mathbf{d}}_n) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{R}}_n \hat{\mathbf{s}}_1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

此时利用一阶误差分析方法, 并且结合式(45)~(50)可以将定位关系式(40)中的误差向量表示为

$$\boldsymbol{\psi}_n = \hat{b}_n(\tilde{\mathbf{d}}_n) - \hat{A}_n(\tilde{\mathbf{d}}_n) \tilde{\mathbf{p}}_n \doteq \boldsymbol{\psi}_{n1} + \boldsymbol{\psi}_{n2} + \boldsymbol{\psi}_{n3} + \boldsymbol{\psi}_{n4} \quad (52)$$

其中,

$$\boldsymbol{\psi}_{n1} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_n \mathbf{S}_1 \\ \Delta \mathbf{R}_n \hat{\mathbf{s}}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_n \mathbf{S}_2 & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \Delta \mathbf{R}_n \hat{\mathbf{S}}_2 & \Delta \mathbf{R}_n \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_n \doteq \Gamma_{n1}^{(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(r)} + \Gamma_{n1}^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(q)} \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ \Delta \hat{\mathbf{R}}_n \mathbf{S}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{M \times 3} & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \Delta \hat{\mathbf{R}}_n \mathbf{S}_2 & \mathbf{O}_{M \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_n \doteq \Gamma_{n2}^{(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(r)} + \Gamma_{n2}^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(q)} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n3} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_4^{(1)} \\ \hat{\mathbf{R}}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_4^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_3 & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \hat{\mathbf{R}}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_3 & \mathbf{R}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_n \doteq \Gamma_{n3}^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(q)} \quad (55)$$

4.2.3 计算定位关系式中误差的渐近协方差矩阵

若将含有观测误差的标量积矩阵 $\{\mathbf{R}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 和 $\{\hat{\mathbf{R}}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 分别记为 $\{\hat{\mathbf{R}}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 和 $\{\hat{\mathbf{R}}_n\}_{1 \leq n \leq N}$, 将含有观测误差的矩阵 $\mathbf{S} = [-\mathbf{s}_1 \mathbf{S}_2]$ 和 $\hat{\mathbf{S}} = [-\hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2]$ 分别记为 $\hat{\mathbf{S}} = [-\hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2]$ 和 $\hat{\mathbf{S}} = [-\hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{S}}_2]$, 则利用一阶误差分析方法可以得到如下误差矩阵表达式

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_n = \hat{\mathbf{R}}_n - \mathbf{R}_n &\doteq (\xi_{n1}^{(r)} \odot \mathbf{r}_n^{(d)}) \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\xi_{n1}^{(r)} \odot \mathbf{r}_n^{(d)})^T \\ &- \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W} - d_n [\xi_{n1}^{(r)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\xi_{n1}^{(r)})^T] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{R}}_n = \hat{\hat{\mathbf{R}}}_n - \hat{\mathbf{R}}_n &\doteq (\xi_{n2}^{(r)} \odot \mathbf{r}_n^{(d)}) \mathbf{1}_M^T + (\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} \odot \xi_{n1}^{(r)}) \mathbf{1}_M^T \\ &+ \mathbf{1}_M (\xi_{n2}^{(r)} \odot \mathbf{r}_n^{(d)})^T + \mathbf{1}_M (\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} \odot \xi_{n1}^{(r)})^T - \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{W}} \\ &- \hat{d}_n [\xi_{n1}^{(r)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\xi_{n1}^{(r)})^T] - d_n [\xi_{n2}^{(r)} \mathbf{1}_M^T + \mathbf{1}_M (\xi_{n2}^{(r)})^T] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S} &\doteq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_M^T \Delta \mathbf{Q} \\ [\mathbf{0}_M \Delta \mathbf{Q}] - \mathbf{S} & (\Delta \mathbf{Q})^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \\ &\doteq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_M^T \Delta \mathbf{Q} \\ [\mathbf{0}_M \Delta \mathbf{Q}] - \mathbf{S} & (\Delta \mathbf{Q})^T \mathbf{1}_M & (\Delta \mathbf{Q})^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n4} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_M \\ \mathbf{R}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_4^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{M \times 3} & \mathbf{O}_{M \times 3} \\ \mathbf{R}_n \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{I}}_3 & \mathbf{O}_{M \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_n \doteq \Gamma_{n4}^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(q)} \quad (56)$$

将式(53)~(56)代入式(52)中可得

$$\boldsymbol{\psi}_n \doteq \Gamma_n^{(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(r)} + \Gamma_n^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_n^{(q)} \quad (57)$$

其中, $\Gamma_n^{(r)} = \Gamma_{n1}^{(r)} + \Gamma_{n2}^{(r)}$; $\Gamma_n^{(q)} = \Gamma_{n1}^{(q)} + \Gamma_{n2}^{(q)} + \Gamma_{n3}^{(q)} + \Gamma_{n4}^{(q)}$. 根据一阶误差分析原理可知

$$\begin{cases} \Gamma_n^{(r)} = \frac{\partial b_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)}{\partial (\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)})^T} - (\hat{\mathbf{p}}_n^T \otimes \mathbf{I}_{2M}) \frac{\partial \text{vec}[A_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)]}{\partial (\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)})^T} \\ \Gamma_n^{(q)} = \frac{\partial b_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)}{\partial \hat{\mathbf{q}}^T} - (\hat{\mathbf{p}}_n^T \otimes \mathbf{I}_{2M}) \frac{\partial \text{vec}[A_n(\tilde{\mathbf{d}}_n)]}{\partial \hat{\mathbf{q}}^T} \end{cases} \quad (58)$$

由式(57)可知, 误差向量 $\boldsymbol{\psi}_n$ 渐近服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_n \doteq \Gamma_n^{(r)} \boldsymbol{\Sigma}_n^{(r)} (\Gamma_n^{(r)})^T + \Gamma_n^{(q)} \boldsymbol{\Sigma}_n^{(q)} (\Gamma_n^{(q)})^T \quad (59)$$

4.2.4 构建协同定位优化准则

为了进行多辐射源协同定位, 需要将式(57)中的 N 个误差向量 $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 进行合并, 以形成高维的误差向量. 结合式(52)和式(57)可得

$$\boldsymbol{\psi}_j = [\boldsymbol{\psi}_1^T \boldsymbol{\psi}_2^T \dots \boldsymbol{\psi}_N^T]^T = \hat{b}_j(\tilde{\mathbf{d}}_j) - \hat{A}_j(\tilde{\mathbf{d}}_j) \tilde{\mathbf{p}}_j \doteq \Gamma_j^{(r)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{(r)} + \Gamma_j^{(q)} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{(q)} \quad (60)$$

其中,

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)=[(\hat{\boldsymbol{b}}_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_1))^T(\hat{\boldsymbol{b}}_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_2))^T \cdots (\hat{\boldsymbol{b}}_N(\tilde{\boldsymbol{d}}_N))^T]^T \\ \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)=\text{blkdiag}\{\hat{\boldsymbol{A}}_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_1), \hat{\boldsymbol{A}}_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_2), \cdots, \hat{\boldsymbol{A}}_N(\tilde{\boldsymbol{d}}_N)\} \\ \boldsymbol{\Gamma}_j^{(q)}=[(\boldsymbol{\Gamma}_1^{(q)})^T(\boldsymbol{\Gamma}_2^{(q)})^T \cdots (\boldsymbol{\Gamma}_N^{(q)})^T]^T \\ \boldsymbol{\Gamma}_j^{(r)}=\text{blkdiag}\{\boldsymbol{\Gamma}_1^{(r)}, \boldsymbol{\Gamma}_2^{(r)}, \cdots, \boldsymbol{\Gamma}_N^{(r)}\} \end{cases} \quad (61)$$

根据一阶误差分析原理可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}_j^{(r)}=\frac{\partial \boldsymbol{b}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)}{\partial (\tilde{\boldsymbol{r}}_j^{(d)})^T}-\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_j^T \otimes \boldsymbol{I}_{2MN}\right) \frac{\partial \text{vec}[A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]}{\partial (\tilde{\boldsymbol{r}}_j^{(d)})^T} \\ \boldsymbol{\Gamma}_j^{(q)}=\frac{\partial \boldsymbol{b}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}^T}-\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_j^T \otimes \boldsymbol{I}_{2MN}\right) \frac{\partial \text{vec}[A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}^T} \end{cases} \quad (62)$$

由式(60)可知,高维误差向量 $\boldsymbol{\psi}_j$ 渐近服从零均值高斯分布,并且其协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_j \doteq \boldsymbol{\Gamma}_j^{(r)} \boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)} (\boldsymbol{\Gamma}_j^{(r)})^T + \boldsymbol{\Gamma}_j^{(q)} \boldsymbol{\Sigma}_j^{(q)} (\boldsymbol{\Gamma}_j^{(q)})^T \quad (63)$$

结合式(60)和式(63)可以构建估计多辐射源位置/速度向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 和同步误差参数向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的优化准则,如式(64)所示:

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{d}}_j} \{ \hat{f}_a(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{d}}_j) \} = \min_{\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{d}}_j} \{ \|\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) - \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \tilde{\boldsymbol{p}}_j\|_2^2 \} \quad (64)$$

4.2.5 求解优化模型

下面考虑对式(64)进行优化求解. 由于目标函数 $\hat{f}_a(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{d}}_j)$ 是关于向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 的二次函数,基于此特性,本文提出求解式(64)的参数解耦优化算法.

(1)设计求解同步误差参数向量的高斯-牛顿迭代算法

首先由式(64)可以得到关于向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 的最优闭式解,如式(65)所示:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j^{\text{opt}}=[(\hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} (\hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \quad (65)$$

然后将式(65)代回式(64)中可以得到仅关于向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的优化模型,如式(66)所示

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j} \{ \hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \} = \min_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j} \left\{ \left\| \Pi^\perp [\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)] \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \right\|_2^2 \right\} \quad (66)$$

其中, $\Pi^\perp [\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)$ 列补空间上的正交投影矩阵,其表达式为

$$\begin{aligned} \Pi^\perp [\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)] \\ = \boldsymbol{I}_{2MN} - \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) [(\hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} (\hat{\boldsymbol{A}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \end{aligned} \quad (67)$$

根据目标函数 $\hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)$ 的代数特性,可以利用高斯-牛顿算法对其进行优化求解. 基于正交投影矩阵的数学性质可得其迭代公式为

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k+1) = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k) - \alpha(k) (\hat{\boldsymbol{H}}_j(k))^{-1} \hat{\boldsymbol{h}}_j(k) \quad (68)$$

其中, $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)$ 和 $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k+1)$ 分别表示第 k 次和第 $k+1$ 次迭代

结果; $0 < \alpha(k) < 1$ 表示步长因子; $\hat{\boldsymbol{h}}_j(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{H}}_j(k)$ 分别表示目标函数 $\hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)$ 的梯度向量和近似 Hessian 矩阵,它们的表达式分别为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{h}}_j(k) &= \nabla \hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \Big|_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)} \\ &= 2(\hat{\boldsymbol{C}}_j(k))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \Pi^\perp [\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k))] \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{H}}_j(k) &= \frac{\partial^2 \hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)}{\partial \tilde{\boldsymbol{d}}_j \partial \tilde{\boldsymbol{d}}_j^T} \Big|_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)} \\ &\doteq 2(\hat{\boldsymbol{C}}_j(k))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \Pi^\perp [\boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k))] \boldsymbol{\Phi}_j^{-1/2} \hat{\boldsymbol{C}}_j(k) \end{aligned} \quad (70)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{C}}_j(k) = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{b}}_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)}{\partial \tilde{\boldsymbol{d}}_j^T} \Big|_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)} - [(\hat{\boldsymbol{p}}_j(k))^T \otimes \boldsymbol{I}_{2MN}] \frac{\partial \text{vec}[A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]}{\partial \tilde{\boldsymbol{d}}_j^T} \Big|_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j(k) &= [(\hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k))]^{-1} \\ &\quad \times (\hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k)) \end{aligned} \quad (72)$$

高斯-牛顿算法的迭代收敛结果 $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k) = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(+\infty)$ 即为同步误差参数向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的最终估计值.

(2)利用闭式表达式获得多辐射源位置/速度向量的估计值

将同步误差参数向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 的最终估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j$ 代入式(65)中即可得到多辐射源位置/速度向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 最终估计值,如式(73)所示:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j = [(\hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j)]^{-1} (\hat{\boldsymbol{A}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \hat{\boldsymbol{b}}_j(\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j) \quad (73)$$

对比式(72)和式(73)可知, $\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j(k) = \hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j(+\infty)$.

在上述求解算法中,首先仅针对向量 $\tilde{\boldsymbol{d}}_j$ 进行迭代优化,然后再利用其迭代收敛值确定向量 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$ 的估计值,因此称其为参数解耦优化算法.

5 新方法的理论性能分析

本节将对第4节中的定位新方法进行理论性能分析,重点推导估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j$ 和 $\hat{\tilde{\boldsymbol{p}}}_j$ 的估计均方误差,并将其与第3节推导的 CRB 进行定量比较,用于验证新方法的渐近统计最优性.

5.1 针对同步误差参数向量的理论性能分析

下面推导估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j$ 的估计均方误差,不妨将其估计误差记为 $\Delta \tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j - \tilde{\boldsymbol{d}}_j$. 首先对式(68)两边取极限可知

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k+1) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(k) - \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha(k) (\hat{\boldsymbol{H}}_j(k))^{-1} \hat{\boldsymbol{h}}_j(k) \\ &\Rightarrow \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j(+\infty) = \nabla \hat{f}_b(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) \Big|_{\tilde{\boldsymbol{d}}_j = \hat{\tilde{\boldsymbol{d}}}_j} = \mathbf{0}_{2N} \end{aligned} \quad (74)$$

结合式(69)、式(71)以及式(74)可得

$$\mathbf{0}_{2N} \doteq 2\mathbf{C}_j^T \Phi_j^{-1/2} \Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} \hat{A}_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} \hat{b}_j(\hat{\mathbf{d}}_j) \quad (75)$$

其中,

$$\mathbf{C}_j = \frac{\partial b_j(\hat{\mathbf{d}}_j)}{\partial \hat{\mathbf{d}}_j^T} - (\hat{\mathbf{p}}_j^T \otimes \mathbf{I}_{2MN}) \frac{\partial \text{vec}[A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]}{\partial \hat{\mathbf{d}}_j^T} \quad (76)$$

$$= \text{blkdiag}\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_N\}$$

其中,

$$\mathbf{C}_n = \frac{\partial b_n(\hat{\mathbf{d}}_n)}{\partial \hat{\mathbf{d}}_n^T} - (\hat{\mathbf{p}}_n^T \otimes \mathbf{I}_{2M}) \frac{\partial \text{vec}[A_n(\hat{\mathbf{d}}_n)]}{\partial \hat{\mathbf{d}}_n^T} \quad (77)$$

对比式(58)和式(77)可知

$$\mathbf{C}_n = -\Gamma_n^{(r)} \mathbf{J}_M \quad (78)$$

结合式(61)、式(76)以及式(78)可得

$$\mathbf{C}_j = -\Gamma_j^{(r)} \mathbf{J}_j \quad (79)$$

为了获得估计误差 $\Delta \hat{\mathbf{d}}_j$ 的表达式,还需要将式(75)在真实向量 $\hat{\mathbf{d}}_j$ 处进行一阶泰勒级数展开,并且忽略误差的高阶项可得

$$\Delta \hat{\mathbf{d}}_j \doteq -[\mathbf{C}_j^T \Phi_j^{-1/2} \Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} \mathbf{C}_j]^{-1} \times \mathbf{C}_j^T \Phi_j^{-1/2} \Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} \boldsymbol{\psi}_j \quad (80)$$

由式(80)可知,估计误差向量 $\Delta \hat{\mathbf{d}}_j$ 渐近服从零均值高斯分布,并且估计值 $\hat{\mathbf{d}}_j$ 的估计均方误差矩阵为

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j) \doteq [\mathbf{C}_j^T \Phi_j^{-1/2} \Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} \mathbf{C}_j]^{-1} \quad (81)$$

通过进一步的数学分析可知,估计值 $\hat{\mathbf{d}}_j$ 具有渐近统计最优性,具体可见如下结论.

定理 3 在一阶误差分析理论框架下满足 $\text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j) = \text{CRB}(\hat{\mathbf{d}}_j)$.

证明 首先将式(67)和式(79)代入式(81)中可得

$$(\text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j))^{-1} = \mathbf{J}_j^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \mathbf{J}_j - \mathbf{J}_j^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) \times [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \mathbf{J}_j \quad (82)$$

然后将定义式 $\hat{\mathbf{r}}_n^{(d)} = \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{p}}_n, \hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_M \hat{\mathbf{d}}_n$ 代入式(40)的矩阵 \mathbf{R}_n 和 $\hat{\mathbf{R}}_n$ 中可以得到关于向量 $\hat{\mathbf{p}}_n$ 和 $\hat{\mathbf{q}}$ 的恒等式,将该恒等式两边分别对向量 $\hat{\mathbf{p}}_n$ 和 $\hat{\mathbf{q}}$ 求导,并且结合式(58)可知

$$\Gamma_n^{(r)} \tilde{\mathbf{G}}_1(\hat{\mathbf{p}}_n, \hat{\mathbf{q}}) - A_n(\hat{\mathbf{d}}_n) = \mathbf{O}_{2M \times 6}, \quad 1 \leq n \leq N \quad (83)$$

$$\Gamma_n^{(r)} \tilde{\mathbf{G}}_2(\hat{\mathbf{p}}_n, \hat{\mathbf{q}}) + \Gamma_n^{(q)} = \mathbf{O}_{2M \times 6M}, \quad 1 \leq n \leq N \quad (84)$$

接着分别将式(83)和式(84)中的 N 个等式进行合并,并且结合式(13)和式(61)可得

$$A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) = \Gamma_j^{(r)} \tilde{\mathbf{G}}_{j1}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}) \quad (85)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{j2}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}) = -(\Gamma_j^{(r)})^{-1} \Gamma_j^{(q)} \quad (86)$$

将式(85)代入式(82)中可知

$$(\text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j))^{-1} = \mathbf{J}_j^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \mathbf{J}_j - \mathbf{J}_j^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \tilde{\mathbf{G}}_{j1}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}) \times [(\tilde{\mathbf{G}}_{j1}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}))^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \tilde{\mathbf{G}}_{j1}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}})]^{-1} \times (\tilde{\mathbf{G}}_{j1}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}))^T (\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} \mathbf{J}_j \quad (87)$$

结合式(15)、式(63)以及式(86)可得

$$(\Gamma_j^{(r)})^T \Phi_j^{-1} \Gamma_j^{(r)} = [\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)} + \tilde{\mathbf{G}}_{j2}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\Sigma}^{(q)} (\tilde{\mathbf{G}}_{j2}(\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}))^T]^{-1} = (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(r)})^{-1} \quad (88)$$

最后将式(88)代入式(87)中,并且结合式(16)可知

$$(\text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j))^{-1} = (\text{CRB}(\hat{\mathbf{d}}_j))^{-1} \Rightarrow \text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j) = \text{CRB}(\hat{\mathbf{d}}_j) \quad (89)$$

证毕.

5.2 针对多辐射源位置/速度向量的理论性能分析

下面推导估计值 $\hat{\mathbf{p}}_j$ 的估计均方误差,不妨将其估计误差记为 $\Delta \hat{\mathbf{p}}_j = \hat{\mathbf{p}}_j - \tilde{\mathbf{p}}_j$. 首先根据式(73)可知

$$(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) \Delta \hat{\mathbf{p}}_j \doteq (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} (\boldsymbol{\psi}_j + \mathbf{C}_j \Delta \hat{\mathbf{d}}_j) \quad (90)$$

基于式(90)可以进一步推得

$$\Delta \hat{\mathbf{p}}_j \doteq [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} (\boldsymbol{\psi}_j + \mathbf{C}_j \Delta \hat{\mathbf{d}}_j) \quad (91)$$

由式(91)可知,估计误差向量 $\Delta \hat{\mathbf{p}}_j$ 渐近服从零均值高斯分布,并且估计值 $\hat{\mathbf{p}}_j$ 的估计均方误差矩阵为

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{p}}_j) \doteq \tilde{\mathbf{P}}_1 + \tilde{\mathbf{P}}_2 + \tilde{\mathbf{P}}_3 + \tilde{\mathbf{P}}_3^T \quad (92)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} \quad (93)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_2 = [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} \mathbf{C}_j \text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j) \times \mathbf{C}_j^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} \quad (94)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_3 = [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} \mathbf{C}_j \mathbf{E}[\Delta \hat{\mathbf{d}}_j \boldsymbol{\psi}_j^T] \times \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} \quad (95)$$

将式(80)代入式(95)中,并且结合式(81)可得

$$\tilde{\mathbf{P}}_3 = -[(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} (A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} \mathbf{C}_j \text{MSE}(\hat{\mathbf{d}}_j) \mathbf{C}_j^T \times \Phi_j^{-1/2} \Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) \times [(A_j(\hat{\mathbf{d}}_j))^T \Phi_j^{-1} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)]^{-1} \quad (96)$$

利用正交投影矩阵性质可知 $\Pi^\perp [\Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j)] \Phi_j^{-1/2} A_j(\hat{\mathbf{d}}_j) = \mathbf{O}_{2MN \times 6N}$, 将其代入式(96)中可得 $\tilde{\mathbf{P}}_3 = \mathbf{O}_{6N \times 6N}$, 于是有

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\boldsymbol{p}}_j) &\doteq \tilde{\boldsymbol{P}}_1 + \tilde{\boldsymbol{P}}_2 = [(A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} \\ &\quad + [(A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} (A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \boldsymbol{C}_j \\ &\quad \times \text{MSE}(\hat{\boldsymbol{d}}_j) \boldsymbol{C}_j^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j) [(A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} \end{aligned} \quad (97)$$

通过进一步的数学分析可知,估计值 $\hat{\boldsymbol{p}}_j$ 具有渐近统计最优性,具体可见如下结论.

定理 4 在一阶误差分析理论框架下满足 $\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{p}}_j) = \text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j)$.

证明 首先结合式(85)和式(88)可知

$$[(A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j)]^{-1} = [(\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(q)})^{-1} \tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}})]^{-1} \quad (98)$$

然后结合式(79)、式(85)以及式(88)可得

$$(A_j(\tilde{\boldsymbol{d}}_j))^T \boldsymbol{\Phi}_j^{-1} \boldsymbol{C}_j = -(\tilde{\boldsymbol{G}}_{j1}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j, \tilde{\boldsymbol{q}}))^T (\boldsymbol{\Sigma}_j^{(q)})^{-1} \boldsymbol{J}_j \quad (99)$$

最后将式(98)和式(99)代入式(97)中,并且结合定理3中的结论以及式(19)可知

$$\text{MSE}(\hat{\boldsymbol{p}}_j) = \text{CRB}(\tilde{\boldsymbol{p}}_j) \quad (100)$$

证毕.

6 仿真实验

本节中的基础实验参数如下:利用8个运动传感器获得 TOAs/FOAs 信息对多个非相关运动辐射源进行定位,传感器在3维空间中的位置/速度数值如表1所示,每个辐射源的距离/距离变化率观测误差向量均服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_n^{(d)} = \sigma_1^2 \text{blkdiag}\{\boldsymbol{I}_M, \boldsymbol{I}_M/10\}$ 的高斯分布,传感器位置/速度先验观测误差向量服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}^{(q)} = \sigma_2^2 (\boldsymbol{I}_M \otimes \text{blkdiag}\{\boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3/10\})$ 的高斯分布,其中 σ_1 和 σ_2 均为相应的标准差.

表 1 传感器在3维空间中的位置与速度数值

传感器序号	1	2	3	4	5	6	7	8
X轴坐标/m	500	-500	500	500	500	-500	-500	-500
Y轴坐标/m	500	500	-500	500	-500	500	-500	-500
Z轴坐标/m	500	500	500	-500	-500	-500	500	-500
X轴速度/(m/s)	10	-10	10	10	10	-10	-10	-10
Y轴速度/(m/s)	10	10	-10	10	-10	10	-10	-10
Z轴速度/(m/s)	10	10	10	-10	-10	-10	10	-10

6.1 仿真实验1

现有两个待定位的非相关运动辐射源,其中运动辐射源1的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (120, -160, 80)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}_1 = (-4, 7, 13)^T \text{ m/s}$,其时频同步误差参数分别为 $d_1 = 150 \text{ m}$ 和 $\dot{d}_1 = 2.5 \text{ m/s}$,运动辐射源2的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{p}_2 = (140, -100, -120)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}_2 = (5, -6, 10)^T \text{ m/s}$,其时频同步误差参数分别为 $d_2 = 120 \text{ m}$ 和 $\dot{d}_2 = 4.5 \text{ m/s}$,标准差分别为 $\sigma_1 = 5 \text{ m}$ 和 $\sigma_2 = 3 \text{ m}$. 下面利用新方法进行定位,并且进行20 000次蒙特卡罗实验,图2描绘了两个运动辐射源的定位结果散点图与定位误差椭圆曲线,图中的3条椭圆曲线分别对应概率0.55、0.75以及0.95. 另一方面,由于新方法需要对同步误差参数进行迭代,为了说明其收敛速度,图3描绘了时频同步误差参数的迭代收敛曲线,图中随机选取了10次蒙特卡罗实验的迭代收敛曲线.

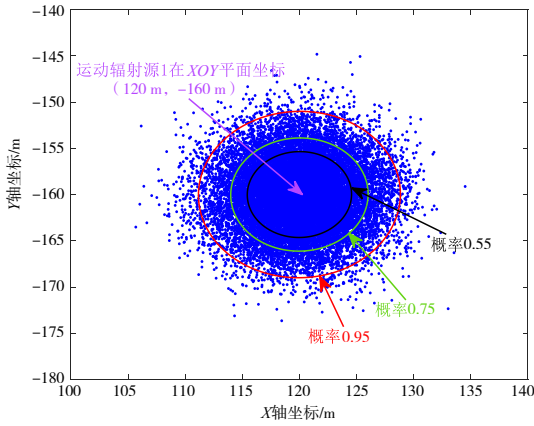
从图2中可以看出,新方法的定位结果散点图的形状与定位误差椭圆的形状相同,并且低概率对应小面积椭圆,高概率对应大面积椭圆,从而验证了新方法的有效性. 从图3中可以看出,新方法具有很快的收敛速度,一般在10次迭代以内即可收敛,这主要得益于高斯-牛顿算法的二次收敛特性.

6.2 仿真实验2

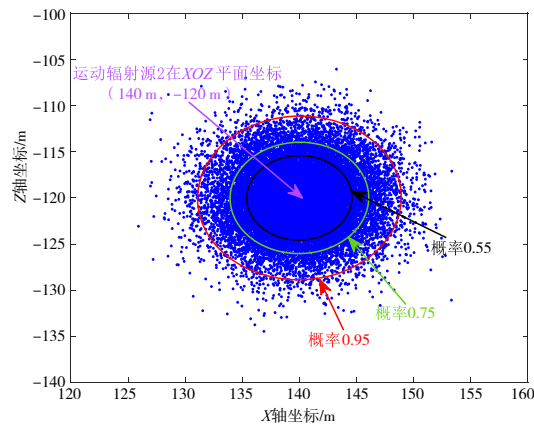
在这一小节将新方法的估计精度与其它定位方法

的估计精度进行比较,选择进行比较的定位方法包括 TSWLS 定位方法、半正定松弛定位方法以及 ML 定位方法. 由于 ML 定位方法需要全部未知参数的迭代初始值,为了进行更全面的比较,这里给出其初始值等于真实值、初始值的平均相对误差等于20%以及初始值的平均相对误差等于50%共3种情形下的估计性能. 此外,由于 TSWLS 等定位方法需要引入辅助变量,此时需要更多的传感器才能获得渐近统计最优的估计性能,于是这里在表1的基础上新增4个运动传感器,它们的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{q}_9 = (800, 1\ 000, 1\ 200)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}_9 = (8, 10, 12)^T \text{ m/s}$, $\boldsymbol{q}_{10} = (-800, -1\ 000, 1\ 200)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}_{10} = (-8, -10, 12)^T \text{ m/s}$, $\boldsymbol{q}_{11} = (-800, 1\ 000, -1\ 200)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}_{11} = (-8, 10, -12)^T \text{ m/s}$, $\boldsymbol{q}_{12} = (800, -1\ 000, -1\ 200)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}_{12} = (8, -10, -12)^T \text{ m/s}$.

现有3个待定位的非相关运动辐射源,其中,运动辐射源1的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{p}_1 = (150, 60, 180)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}_1 = (-6, -7, 12)^T \text{ m/s}$,其时频同步误差参数分别为 $d_1 = 220 \text{ m}$ 和 $\dot{d}_1 = 4.5 \text{ m/s}$,运动辐射源2的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{p}_2 = (-130, -170, -50)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}_2 = (6, -8, -12)^T \text{ m/s}$,其时频同步误差参数分别为 $d_2 = 150 \text{ m}$ 和 $\dot{d}_2 = -6.8 \text{ m/s}$,运动辐射源3的位置向量和速度向量分别为 $\boldsymbol{p}_3 = (80, 50, -130)^T \text{ m}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}_3 = (10, 7, -9)^T \text{ m/s}$,其时频同步误

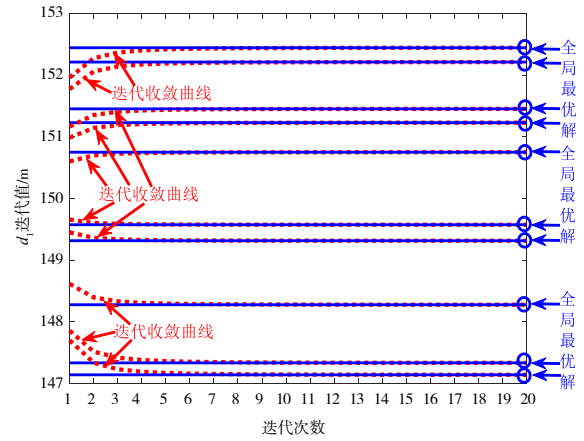


(a) 运动辐射源1(XOY平面)

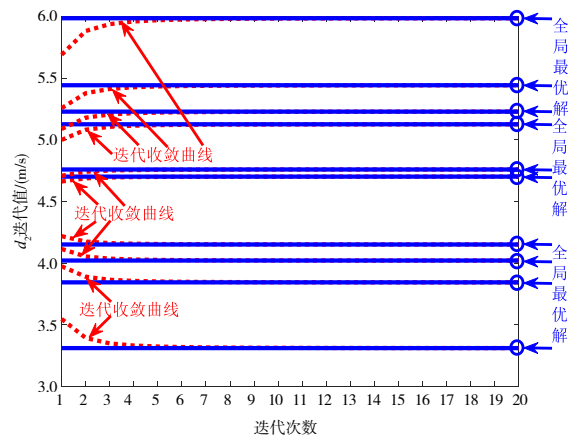


(b) 运动辐射源2(XOZ平面)

图2 两个运动辐射源的定位结果散点图与定位误差椭圆曲线



(a) d_1 的迭代收敛曲线



(b) d_2 的迭代收敛曲线

图3 时频同步误差参数的迭代收敛曲线

差参数分别为 $d_3 = -180$ m 和 $\dot{d}_3 = 6.2$ m/s, 将标准差分别设为 $\sigma_1 = 4c$ (m) 和 $\sigma_2 = 0.4c$ (m), 其中参数 c 从 1 变化至 20. 图 4 给出了多辐射源位置(即 $p_j = [p_1^T p_2^T p_3^T]^T$) 估计均方根误差随着参数 c 的变化曲线; 图 5 给出了频域同步误差参数(即 $\dot{d}_j = (\dot{d}_1, \dot{d}_2, \dot{d}_3)^T$) 估计均方根误差随着参数 c 的变化曲线.

从图 4 和图 5 中可以看出: (1) 由于新方法具备加权多维标度分析方法的特点, 其通过利用标量积矩阵的维度信息和特征结构信息提高了对大观测误差的鲁棒性, 因此, 相比 TSWLS 定位方法和半正定松弛定位方法, 新方法具有更高的误差阈值; (2) 相比迭代初始值含有一定随机误差的 ML 定位方法(以平均相对误差等于 20% 和 50% 为例), 新方法在大观测误差条件下具有更高的估计精度, 这是因为虽然两种方法均属于迭代型方法, 但是新方法为参数解耦估计方法, 它仅需要同步误差参数参与迭代(仅有 6 个参数), 而 ML 定位方法则需要全部未知参数参与迭代(共有 24 个参数), 所

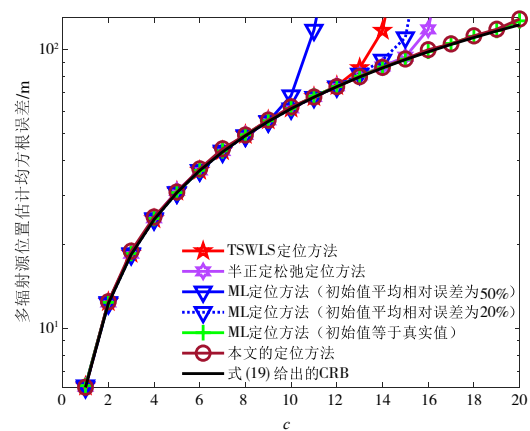


图4 多辐射源位置估计均方根误差随着参数 c 的变化曲线

以前者受迭代初始值的影响更小; (3) 在大观测误差条件下, 新方法的估计精度与迭代初始值等于真实值的 ML 定位方法的估计精度十分接近, 并且性能均可以通

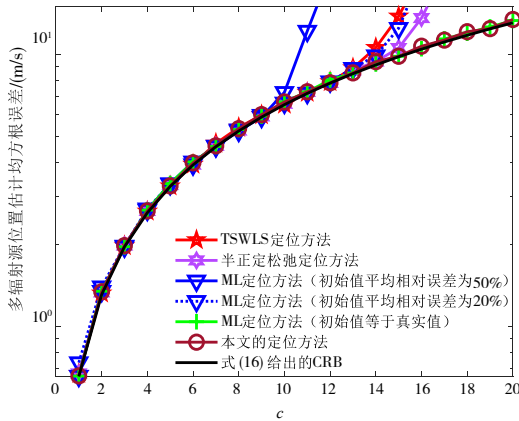


图5 频域同步误差参数估计均方根误差随着参数c的变化曲线

近相应的CRB,从而说明了新方法在大观测误差条件下的稳健性,同时也验证了本文第5节理论性能分析的有效性.

6.3 仿真实验3

由于新方法是基于加权多维标度分析衍生出的,下面将新方法 with 文献[25]中的加权多维标度定位方法(未考虑时钟同步误差的影响)进行性能比较,旨在描述时钟同步误差对定位精度的影响.将标准差分别固定为 $\sigma_1=48\text{ m}$ 和 $\sigma_2=4.8\text{ m}$,将时域同步误差参数设为 $d_j=(d_1, d_2, d_3)^T=(4, 4, -4)^T a(\text{m})$,频域同步误差参数设为 $\dot{d}_j=(\dot{d}_1, \dot{d}_2, \dot{d}_3)^T=(1, -1, 1)^T a(\text{m/s})$,其中参数 a 从0变化至20.图6和图7分别给出了多辐射源位置和多辐射源速度估计均方根误差随着参数 a 的变化曲线.

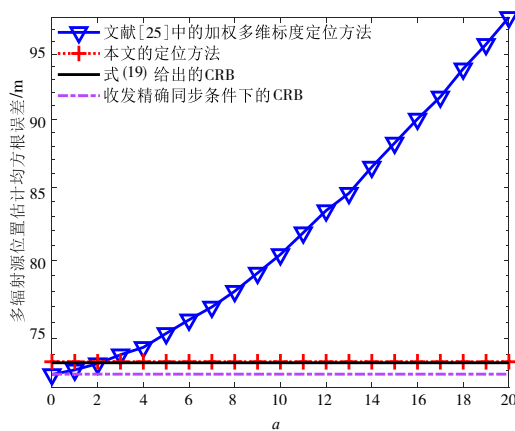


图6 多辐射源位置估计均方根误差随参数a的变化曲线

从图6和图7中可以看出:(1)由于文献[25]中的加权多维标度定位方法并未考虑时钟同步误差的影响,因此其估计精度会随着参数 a 的增加而逐渐增大;(2)新方法的估计精度始终能逼近相应的CRB,并且不会

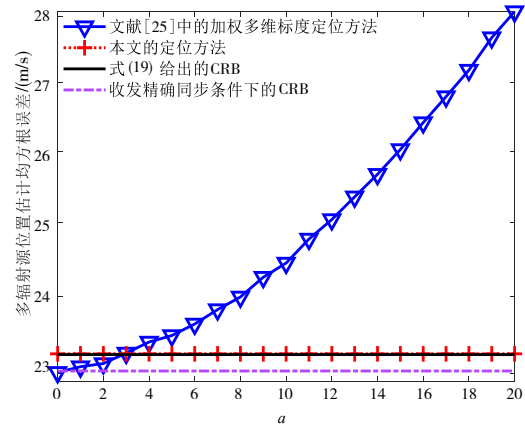


图7 多辐射源速度估计均方根误差随参数a的变化曲线

随参数 a 的变化而改变;(3)当参数 a 很小时,同步误差参数的量级也很小,时钟同步误差还未能对定位方法产生实质影响,此时文献[25]中的定位方法的估计精度还会略优于新方法的估计精度;(4)当参数 a 超过某个阈值时,新方法的性能优势会逐渐显现出来,并且随着参数 a 的增加,两者的性能差异会逐渐拉大,这说明了新方法可以有效抑制时钟同步误差的影响,并消除固有的定位偏差.

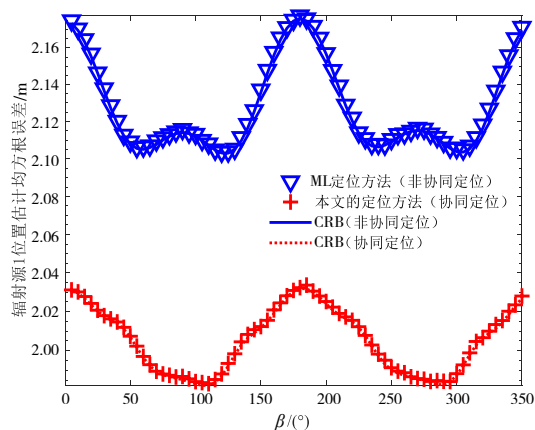
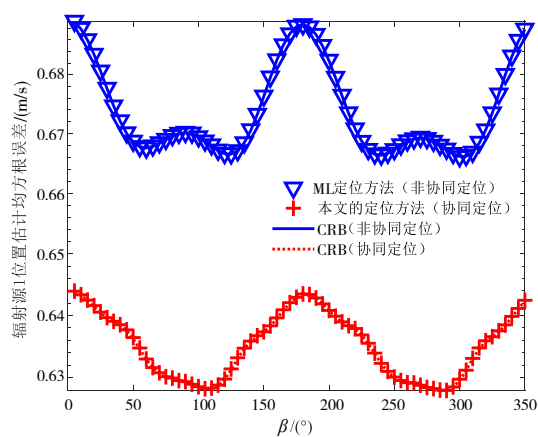
6.4 仿真实验4

下面比较多辐射源协同定位与多辐射源非协同独立定位两种情形下的估计精度,用以验证多辐射源协同定位能产生协同增益,其中协同定位结果由新方法给出,非协同定位结果由ML定位方法给出(初始值设为真实值),即针对每个辐射源分别利用ML方法进行定位.将标准差分别固定为 $\sigma_1=1\text{ m}$ 和 $\sigma_2=2\text{ m}$,将辐射源位置向量分别设为 $p_1=500(\cos(\beta)\cos(\gamma), \sin(\beta)\cos(\gamma), \sin(\gamma))^T(\text{m})$ 、 $p_2=1500(\cos(\beta)\cos(\gamma), \sin(\beta)\cos(\gamma), \sin(\gamma))^T(\text{m})$ 以及 $p_3=3000(\cos(\beta)\cos(\gamma), \sin(\beta)\cos(\gamma), \sin(\gamma))^T(\text{m})$,其中参数 $\gamma=10^\circ$,参数 β 从 5° 变化至 350° ,其余仿真条件同图4和图5.图8和图9分别给出了辐射源1位置和辐射源1速度估计均方根误差随着参数 β 的变化曲线.限于篇幅考虑,这里仅给出辐射源1的定位结果,其余两个辐射源定位结果相似.

从图8和图9中可以看出:多辐射源协同定位可以产生显著的协同增益,并且协同增益的大小与辐射源位置紧密相关.

7 结论

针对收发两端未能精确同步的定位场景,本文提出了一种基于加权多维标度分析的TOAs/FOAs多辐射源协同定位方法,该方法实现了辐射源位置/速度参数与时频同步误差参数的解耦合,不仅能显著降低参与

图8 辐射源1位置估计均方根误差随参数 β 的变化曲线图9 辐射源1速度估计均方根误差随参数 β 的变化曲线

优化迭代的变量维数,还具备加权多维标度分析方法的高误差阈值的特点.此外,该文还通过理论性能分析证明了新方法的估计均方根误差能渐近逼近相应的CRB.仿真实验验证了新方法的优越性.

参考文献

- [1] 姚山峰, 欧阳鑫信, 贺青. 窄带跳频信号的无模糊时差估计算法[J]. 电子学报, 2019, 47(4): 798-805.
YAO S F, OUYANG X X, HE Q. Unambiguous TDOA estimation algorithm of narrowband frequency hopping signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(4): 798-805. (in Chinese)
- [2] YUAN W J, WU N, ETZLINGER B, et al. Cooperative joint localization and clock synchronization based on Gaussian message passing in asynchronous wireless networks[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2016, 65(9): 7258-7273.
- [3] TIAN Q, FENG D Z, HU H S, et al. Bi-iterative algorithm for joint localization and time synchronization in wireless

sensor networks[J]. Signal Processing, 2019, 154(1): 304-313.

- [4] ZHAO S H, ZHANG X P, CUI X W, et al. Optimal two-way TOA localization and synchronization for moving user devices with clock drift[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(8): 7778-7789.
- [5] ZHAO S H, GUO N Y, ZHANG X P, et al. Closed-form two-way TOA localization and synchronization for user devices with motion and clock drift[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29(1): 100-104.
- [6] XIONG H, CHEN Z Y, YANG B Y, et al. TDOA localization algorithm with compensation of clock offset for wireless sensor networks[J]. China Communications, 2015, 12(10): 193-201.
- [7] WANG T, XIONG H, DING H, et al. TDOA-based joint synchronization and localization algorithm for asynchronous wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Communications, 2020, 68(5): 3107-3124.
- [8] MA F H, LIU Z M, YANG L, et al. Source localization in large-scale asynchronous sensor networks[J]. Digital Signal Processing, 2021, 109(2): 102920.
- [9] WANG Y, HO K C. TDOA source localization in the presence of synchronization clock bias and sensor position errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(18): 4532-4544.
- [10] 王鼎, 尹洁昕, 高路, 等. 一种同步时钟偏差和传感器位置误差存在下的TDOA定位新方法[J]. 航空学报, 2022, 43(4): 325405.
WANG D, YIN J X, GAO L, et al. A novel method for TDOA localization in presence of synchronization clock bias and sensor position uncertainty[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2022, 43(4): 325405. (in Chinese)
- [11] WANG D, YIN J X, TANG T, et al. Quadratic constrained weighted least-squares method for TDOA source localization in the presence of clock synchronization bias: analysis and solution[J]. Digital Signal Processing, 2018, 82(11): 237-257.
- [12] ZOU Y B, LIU H P. Semidefinite programming methods for alleviating clock synchronization bias and sensor position errors in TDOA localization[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27(1): 241-245.
- [13] ZHU S H, DING Z G. Joint synchronization and localization using TOAs: A linearization based WLS solution[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2010, 28(7): 1017-1025.
- [14] HUANG J, XUE Y B, YANG L. An efficient closed-

form solution for joint synchronization and localization using TOA[J]. Future Generation Computer Systems, 2013, 29(3): 776-781.

- [15] SUN M, YANG L. On the joint time synchronization and source localization using TOA measurements[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2013, 2013(1): 794805.
- [16] WANG Y G, HUANG J, YANG L, et al. TOA-based joint synchronization and source localization with random errors in sensor positions and sensor clock biases[J]. Ad Hoc Networks, 2015, 27(2): 99-111.
- [17] KAZEMI S A R, AMIRI R, BEHNIA F. Efficient joint localization and synchronization in distributed MIMO radars[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27(7): 1200-1204.
- [18] YEREDOR A. On passive TDOA and FDOA localization using two sensors with no time or frequency synchronization[C]//2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver: IEEE, 2019: 4066-4070.
- [19] SHI J, WANG G, JIN L P. Moving source localization using TOA and FOA measurements with imperfect synchronization[J]. Signal Processing, 2021, 186(9): 108113.
- [20] SUN M, HO K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(7): 3434-3440.
- [21] 郝本建, 朱建峰, 李赞, 等. 基于 TDOAs 与 FDOAs 的多信号源及感知节点联合定位算法[J]. 电子学报, 2015, 43(10): 1888-1897.
HAO B J, ZHU J F, LI Z, et al. Joint multiple disjoint sources and sensors localization based on TDOAs and FDOAs[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(10): 1888-1897. (in Chinese)
- [22] WANG D, YIN J X, ZHANG T, et al. Iterative constrained weighted least squares estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor position and velocity uncertainties[J]. Digital Signal Processing, 2019, 92(9): 179-205.
- [23] LI J Z, PANG H W, GUO F C, et al. Localization of multiple disjoint sources with prior knowledge on source locations in the presence of sensor location errors[J]. Digital Signal Processing, 2015, 40(5): 181-197.

- [24] YANG B, YANG Z Y, WANG D. A Lagrangian multiplier method for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources with distance and velocity correlation constraints[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 2020(25): 1382321.
- [25] Wei H W, Lu P Z. On optimality of weighted multidimensional scaling for range-based localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68(2): 2105-2113.

作者简介



王 鼎 男, 1982年10月出生于安徽省芜湖市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院副教授、博士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.

E-mail: wang_ding814@aliyun.com



尹洁昕 女, 1989年8月出生于河南省郑州市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院副教授、硕士生导师. 主要研究方向为无线信号定位、阵列信号处理.

E-mail: Cindyin0807@163.com



郑娜娥 女, 1984年7月出生于福建省漳州市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学数据与目标工程学院讲师. 主要研究方向为无线信号定位、雷达信号处理. 中国电子学会会员编号: E190068117M.

E-mail: 13837122426@163.com



杨 宾 男, 1974年11月出生于江西省南昌市. 现为中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向为无线电频谱监测.

E-mail: ybmailbox@126.com